FUNDAMENTOS
de la
GEOMETRIA.

Por el Dr. DAVID HILBERT.

CAPITULO PRIMERO.

LOS CINCO GRUPOS DE AXIOMAS.

§ I.

Los elementos de la geometría y los cinco grupos de axiomas.

Aclaración. Pensemos tres diferentes clases de objetos. Llamemos a los objetos del primer sistema ***puntos,*** y designémoslos con A, B, C...; llamemos a los objetos del segundo sistema ***rectas,*** y designémoslas con a, b, c...; a los objetos del tercer sistema llamemos ***planos,*** y designémoslos con $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$. Los puntos se llaman también ***elementos de la geometría lineal;*** puntos y rectas se llaman ***elementos de la geometría plana;*** y puntos, rectas y planos se llaman ***elementos de la geometría espacial*** o del ***espacio.***

Supongamos que puntos, rectas y planos estén en ciertas relaciones mutuas que designaremos con las palabras: "estar en", "entre", "paralelo", "congruente", "continuo", cuya exacta y completa descripción se conseguirá por medio de

los *Axiomas de la geometría.*

Los axiomas de la geometría se distribuyen en cinco grupos, cada uno de los cuales expresa ciertos hechos, conexos entre sí y fundamentales, de nuestra intuición.

Tales grupos de axiomas se llamarán de la siguiente manera:

I. 1-7 Axiomas de *enlace,*

II. 1-5 Axiomas de *orden,*

III Axioma de *paralelismo.* (Axioma de Euclides).

IV. 1-6 Axiomas de *congruencia.*

V. Axioma de *continuidad* (Axioma de Arquímedes).

§ 2

Primer grupo de axiomas: axiomas de enlace.

Los axiomas de este grupo establecen entre los conceptos de puntos, rectas y planos un *"enlace"*, y se formulan de la siguiente manera:

I. 1. *Dos puntos diversos* A, B *determinan siempre una recta,* $\underline{a}$; *y pondremos* AB-$\underline{a}$ o bien BA-$\underline{a}$.

En vez de "determinan" podremos servirnos de otras expresiones, por ejemplo: A "está en" $\underline{a}$ A "es un punto de" $\underline{a}$, $\underline{a}$ "pasa por" A "y por" B, $\underline{a}$ "une" A "y" o "con" B; o parecidas expresiones. Cuando A está en $\underline{a}$ y además en otra recta diferente $\underline{b}$, emplearemos también la expresión: "las rectas $\underline{a}$ y $\underline{b}$ tienen el punto común, A", o parecidas.

I. 2 *Dos puntos diversos cualesquiera de una recta determinan esa misma recta; esto es: si* AB-$\underline{a}$ y AC-$\underline{a}$, y B$\neq$C, *será también* BC-$\underline{a}$.

I. 3 *Tres puntos* A, B, C *que no estén en una y la misma recta determinan siempre un plano* α, *y pondremos* ABC-α.

Emplearemos también las expresiones: A,B,C "están en" α, ; A,B,C "son puntos de" α, y otras parecidas.

I. 4 *Tres puntos cualesquiera* A,B,C *de un plano* α, *que no estén en una y la misma recta determinan ese mismo plano* α.

I. 5 *Si dos puntos* A,B *de una recta* a *están en un plano* α, *cada uno de los puntos de* a *está en* α.

En este caso decimos: la recta a está en el plano α; y expresiones parecidas.

I. 6 *Si dos planos* α,β *tienen un punto común* A, *tienen al menos algún otro punto común,* B.

I. 7 *En cada recta hay al menos dos puntos; en cada plano hay al menos tres puntos no colocados en una recta; y en el espacio hay al menos cuatro puntos no colocados en un plano.*

Los axiomas I. 1-2 incluyen solamente enunciados sobre puntos y rectas, esto es: sobre elementos de la geometría plana y pueden, de consiguiente, llamarse *los axiomas planos del grupo* I, para distinguirlos de los axiomas I. 3-7, que designaré brevemente como *los axiomas espaciales.*

De entre los teoremas, que de los axiomas I. 1-7 se siguen, menciono solamente estos dos:

Teorema 1. Dos rectas de un plano tienen o un punto común o ninguno; dos planos tienen o ningún punto común o una recta; un plano y una recta no colocada en él tienen o ningún punto o uno común.

Teorema 2. Por una recta y por un punto no colocado

en ella, lo mismo que por dos rectas distintas con un punto común, pasa siempre un plano y uno solo.

§3.

Segundo grupo de axiomas: axiomas de orden.

Los axiomas de este grupo definen el concepto de "entre" y hacen posible, por medio de este concepto, el "ordenamiento" de los puntos en una recta, en un plano y en el espacio.

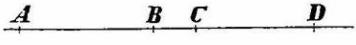
Aclaración. Los puntos de una recta están en ciertas relaciones entre sí, para cuya descripción nos servirá especialmente la palabra "entre".

II. 1. *Si* A,B,C *son puntos de una recta, y* B *está entre* A *y* C, *estará también* B *entre* C *y* A.

II 2 *Si* A *y* C *son dos puntos de una recta, hay siempre un punto* B *cuando menos que está entre* A *y* C, *y hay al menos un punto* D *tal que* C *esté entre* A *y* D.

II. 3 *Entre tres puntos de una recta hay siempre uno y solamente uno que está entre los otros dos.*

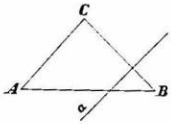
II 4. *Cuatro puntos cualesquiera* A,B,C,D *de una recta pueden ser siempre ordenados de manera que* B *esté entre* A *y* C *y también entre* A *y* D, *y además* C *esté entre* A *y* D *y también entre* B *y* D.



Definición. Al sistema de los puntos A y B, que estén

en una recta a llamamos ***segmento*** y lo designaremos con AB o con BA . Los puntos entre A y B se llaman puntos del segmento AB o también puntos colocados "dentro" del segmento AB; de todos los demás puntos de la recta a se dirá que están colocados "fuera" del segmento AB. Los puntos A,B se llaman "puntos extremos del segmento AB."

II. 5 *Sean* A,B,C *tres puntos no colocados en línea recta, y sea* a *una recta en el plano* ABC, *no tocando tal recta ninguno de los puntos* A,B,C; *si la recta* a *pasa por un punto interior al segmento* AB, *pasará siempre o por un punto del segmento* BC *o por un punto del segmento* AC.



Los axiomas II. 1-4 incluyen solamente enunciados sobre los puntos en una recta y pueden, por tanto, llamarse *los axiomas lineales del grupo* II; el axioma II. 5 incluye un enunciado sobre los elementos de la geometría plana y se llamará por tanto el *axioma plano del grupo* II.

§ 4

Consecuencia de los axiomas de enlace y de orden.

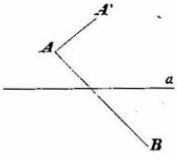
De los axiomas lineales II. 1-4 se deducen inmediatamente y sin trabajo los teoremas siguientes:

Teorema 3. Entre dos puntos cualesquiera de una recta hay siempre infinitos puntos.

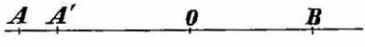
Teorema 4. Si se da un cierto número finito de puntos de una recta, se los puede ordenar siempre en una serie A,B,C,D,E. . , K, de manera que B esté por una parte entre

A y por otra entre C.D.E. . .K; y esté C entre A.B por una parte y D.E. . .K por otra; y D esté entre A.B.C por una parte y por otra E. . .K etc. Y fuera de este orden sólo se da el inverso K. .E.D.C. B.A que posee las mismas propiedades.

Teorema 5. Toda recta a, que se halle en un plano, divide los demás puntos del plano en dos regiones con la siguiente propiedad: cada punto A de una de las regiones determina con cualquier otro punto B de la otra un segmento AB en el cual hay un punto de la recta a; por el contrario: dos puntos cualesquiera A, A' de una y la misma región determinan un segmento AA' que no encierra ningún punto de a.



Aclaración. Sean A.A'. O.B cuatro puntos de una recta a de modo que O esté entre A y B, mas no entre A.A'. Decimos: los puntos A.A' están *en la recta* a *en uno y el mismo lado que el punto* O, y los puntos A.B están *en la recta* a *en distinto lado respecto del punto* O.



El conjunto de los puntos colocados en uno y el mismo lado respecto del punto O de la recta a se llama *semirrayo* que parte de O; así que cada punto de una recta la divide en dos *semirrayos.*

Y sirviéndonos de las expresiones del teorema 5 diremos: los puntos A.A' se hallan *en el plano en uno y el mismo lado de la recta* a, y los puntos A.B se hallan en *el plano en diversos lados respecto de la recta* a.

FUNDAMENTOS DE LA GEOMETRIA

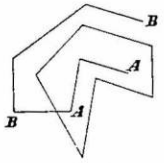
Definición. Un sistema de segmentos AB.BC. CD...KL se llama *trazado* que une unos con otros los puntos A... L: tal trazado se designa brevemente con ABCD...KL. Los puntos interiores a los segmentos AB. BC. CD... KL. al igual que los puntos A.B.C.D...K.L se llaman. en conjunto. *los puntos del trazado.* Si. en especial. el punto L coincide con el punto A el trazado recibirá el nombre de *polígono,* y se lo designará por el polígono ABCD...K Los segmentos AB.BC.CD...KA se llaman *lados del polígono.* Los puntos A.B.C.D. .K se llaman *vértices del polígono.* Polígonos con 3.4....n vértices se llamarán respectivamente trivértices. cuadrivértices.... enevértices.

Cuando los vértices de un polígono son todos distintos entre sí y ningún vértice del polígono coincide con un lado y finalmente si dos lados cualesquiera de un polígono no tienen ningún punto común. tal polígono se llama *simple.*

Por medio del teorema 5 se puede llegar sin más dificultad a los teoremas siguientes:

Teorema 6. Todo polígono simple. cuyos vértices se hallen todos en el plano. divide los puntos de este plano. que no pertenezcan ya al trazado del polígono. en dos regiones. una interior y otra exterior. con la siguiente propiedad: si A es un punto del interior (punto interior). y B un punto del exterior (punto exterior), todo trazado que una los puntos A.B tiene al menos un punto común con el polígono. Por el contrario: si A.A' son dos puntos del interior y B.B' dos puntos del exterior. habrá siempre trazados que unan A con A' y B con B' y que no tengan con el polígono ningún lado común.

Se dan rectas en α que pasan enteramente por fuera del polígono. Por el contrario, no hay ni una de tales rectas que corra enteramente en el interior del polígono.



Teorema 7. Todo plano divide los restantes puntos del espacio en dos regiones de la siguiente propiedad: cada punto A de una región determina con cada punto B de la otra un segmento AB, dentro del cual se halla un punto de α; por el contrario, dos puntos cualesquiera A,A' de una y la misma región determinan siempre un segmento AA' que no incluye ningún punto de α.

Aclaración. Sirviéndonos de las expresiones de este teorema 7 podremos decir: los puntos A,A' se encuentran *en el espacio en uno y el mismo lado del plano* α, y los puntos A,B están en el espacio *en diversos* lados *del plano* α.

El teorema 7 expresa los hechos fundamentales respecto del orden de los elementos en el espacio. Mas tales hechos son simples consecuencias de los axiomas anteriores y no hace falta en el grupo II ningún axioma espacial nuevo.

§5

Tercer grupo de axiomas: axioma de paralelismo.

(Axioma euclídeo)

La introducción de este axioma *simplifica* los fundamentos y *facilita* grandemente la construcción de la

geometría. Le damos la siguiente formulación:

III *En un plano* α *por un punto* A *fuera de una recta* $\underline{a}$ *se puede trazar siempre una y una sola recta que no corte a la recta* $\underline{a}$; *tal recta se llama la paralela con* $\underline{a}$ *por el punto* A.

Esta formulación del axioma de las paralelas incluye dos enunciados: por el ***primero,*** en el plano α y por A hay siempre una recta que no corta a $\underline{a}$; en el ***segundo*** se afirma que no es posible ninguna otra recta de esta clase.

El segundo enunciado es el esencial, y se lo puede formular así:

Teorema 8. Si dos rectas $\underline{a}$,$\underline{b}$ en un plano no cortan a una tercera recta $\underline{c}$ del mismo plano, tampoco se cortarán entre sí.

En efecto: si $\underline{a}$,$\underline{b}$ tuvieran un punto A común, serían posibles por el punto A y en el mismo plano las dos rectas $\underline{a}$,$\underline{b}$ que no cortarían a la $\underline{c}$; lo cual contradice al segundo enunciado del axioma de paralelismo en nuestra primera formulación. E inversamente: del teorema 8 se sigue el segundo enunciado del axioma de paralelismo en nuestra primera formulación.

El axioma de las paralelas III es un ***axioma plano.***

§ 6.

Cuarto grupo de axiomas: axiomas de congruencia

Los axiomas de este grupo definen el concepto de congruencia o de movimiento.

Aclaración. Los segmentos están en ciertas relaciones mutuas para cuya descripción nos servirá la palabra

"congruente".

IV. 1. *Si* A,B *son dos puntos en una recta* a *y si además* A' *es un punto en la misma recta* a *o en otra* a', *se podrá siempre encontrar en un lado dado de la recta* a' *respecto del punto* A *un punto* B' *y uno solo tal que el segmento* AB (*o* BA) *sea congruente con el segmento* A'B'; *simbólicamente:*

$$AB = A'B'.$$

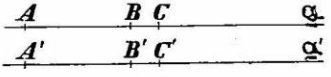
Cada segmento es congruente consigo mismo, esto es: vale siempre

$$AB = AB.$$

Diremos también que todo segmento puede ser *transportado* de manera determinada y unívoca sobre un lado de una recta dada a partir de un punto dado.

IV. 2. *Si un segmento* AB *es congruente con el segmento* A'B' *y con el segmento* A"B", *serán congruentes también los segmentos* A'B' *y* A"B", *esto es: si* AB=A'B' *y* AB=A"B" *vale también* A'B'=A"B".

IV. 3. *Sean* AB, BC *dos segmentos sin puntos comunes sobre la recta* a, *y además* A'B', B'C' *dos segmentos sobre la misma recta o sobre otra distinta* a' *igualmente sin puntos comunes; si* AB=A'B' *y* BC=B'C' *serán también siempre* AC=A'C'.



Definición. Sea α un plano cualquiera, y h, k dos semirrayos diferentes que parten de un punto O en α y que pertenecen a rectas *distintas.* El sistema de estos dos semirrayos h, k se llama *ángulo* y lo designaremos con ∢(h,k) o con ∢(k,h).

De los axiomas II. 1-5 es fácil deducir que los semirrayos h,k juntamente con el punto O, dividen los demás puntos del plano α en dos regiones con la propiedad siguiente: si A es un punto de una de ellas y B otro punto de la otra región, todo trazado de segmentos que una A y B pasa por O, o, si no, tiene con $\underline{h}$ o con $\underline{k}$ un punto común. Si, por el contrario, A,A' son puntos de la misma región, se da siempre un trazado que une A y A' y que no pasa por O ni por otro punto de los semirrayos $\underline{h,k}$. Se distingue una de otra de estas dos regiones en que en una de ellas todo segmento que una dos puntos cualesquiera de ella está siempre dentro de la misma; y a esta región especial se dará el nombre de ***interior*** de ángulo $(\underline{h,k})$, para distinguirla de la otra región que podrá denominarse ***exterior*** del ángulo $(\underline{h,k})$. Los semirrayos $\underline{h,k}$, se llaman ***lados*** del ángulo y el punto O se llama ***vértice*** del ángulo.

IV. 4. *Si se dan un ángulo* $\sphericalangle(\underline{h,k})$ *en un plano* α, *la recta* $\underline{a}'$ *en un plano* α', *se fija un lado de* $\underline{a}'$ *sobre el* α', *y si a la vez* h' *designa un semirrayo de la recta* a' *que parte del punto* O', *se dará en este caso en el plano* α' *un semirrayo y sólo uno* $\underline{k}'$, *tal que el ángulo* $(\underline{h,k})$ *o el* $(\underline{k,h})$ *sea congruente con el ángulo* $(\underline{h',k'})$ *y a la vez que todos los puntos interiores del ángulo* $(\underline{h',k'})$ *se encontrarán en el lado dado de* a', *simbólicamente:*

$$\sphericalangle(\underline{h,k}) = \sphericalangle(\underline{h',k'})$$

Todo ángulo es congruente consigo mismo, esto es: vale siempre

$$\sphericalangle(\underline{h,k}) = \sphericalangle(\underline{h,k})$$

Diremos también abreviadamente que todo ángulo en un plano dado puede ser ***transportado*** de manera unívoca a

un lado de un semirrayo dado.

IV. 5. *Si un ángulo* $(\underline{h,k})$ *es congruente tanto con el ángulo* $(\underline{h',k'})$ *como con el ángulo* $(\underline{h'',k''})$, *también serán congruentes entre sí los ángulos* $(\underline{h',k'})$ *y* $(\underline{h'',k''})$, *esto es: si* $\sphericalangle(\underline{h,k}) = \sphericalangle(\underline{h',k'})$ *y si* $\sphericalangle(\underline{h,k}) = \sphericalangle(\underline{h''k''})$, *serán también* $\sphericalangle(\underline{h',k'}) \sphericalangle(\underline{h'',k''})$.

Aclaración. Sea ABC un triángulo; designemos respectivamente con $\underline{h,k}$ los dos semirrayos que parten de A y pasan por B y por C. Se dirá que el ángulo $(\underline{h,k})$ es el comprendido por los lados AB,AC o que es el opuesto al lado BC del triángulo ABC; tal ángulo encierra en su interior todos los puntos interiores del triángulo ABC, y se le designará con $\sphericalangle$BAC o con $\sphericalangle$ A.

IV. 6. *Si para dos triángulos* ABC *y* A'B'C' *valen las congruencias* AB = A'B', AC = A'C', $\sphericalangle$BAC = $\sphericalangle$B'A'C' *se cumplirán también las congruencias* $\sphericalangle$ABC = $\sphericalangle$A'B'C' *y* $\sphericalangle$ACB = $\sphericalangle$A'C'B'

Los axiomas IV. 1-3 incluyen solamente enunciados acerca de la congruencia de segmentos sobre rectas: pueden por tanto llamarse axiomas *lineales* del grupo IV. Los axiomas IV 4-5 incluyen enunciados sobre la congruencia de ángulos. El axioma IV.6 sirve de unión entre los conceptos de congruencia para ángulos y segmentos. Los axiomas IV.4-6 incluyen enunciados sobre los elementos de la geometría plana y pueden, por tanto, llamarse axiomas *planos* del grupo IV.

§ 7

(Consecuencias de los axiomas de congruencia Teoremas 9-20)

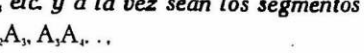
§ 8

Quinto grupo de axiomas: Axioma de continuidad

(Axioma de Arquímedes)

Este axioma hace posible introducir en la geometría el concepto de continuidad. Para su formulación hay que fijar el sentido de *"igualdad"* de dos segmentos sobre una recta. Para este fin podemos fundarnos o sobre los axiomas de congruencia de segmentos y llamar segmentos *"iguales"* a los que sean ***congruentes***, o bien, a base de los grupos I, II de axiomas determinar, mediante adecuadas convenciones, cómo hay que transportar un segmento desde un punto de una recta dada, de modo que resulte un nuevo y determinado segmento *"igual"* al primero. Y a tenor de esta fijación el axioma de Arquímedes se formula así.

V. *Sea* A_1 *un punto cualquiera sobre una recta entre dos puntos cualesquiera* A,B: *constrúyanse los puntos* A_2, A_3, A_4. . , *tales que* A_1 *esté entre* A *y* A_2, A_2 *entre* A_1 *y* A_3, A_3 *entre* A_2 *y* A_4 *etc. y a la vez sean los segmentos* AA_1, A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4. . ,



iguales entre sí, en este caso se dará siempre en la serie de puntos A_2, A_3, A_4. . , *un punto* A_n *tal que* B *se hallará entre* A *y* A_n.

El axioma de Arquímedes es un axioma *lineal.*

CAPITULO SEGUNDO

NO CONTRADICCION E INDEPENDENCIA MUTUA DE LOS AXIOMAS.

§9.

No contradicción de los axiomas.

Los axiomas de los cinco grupos establecidos en el capítulo 1 no se contradicen mutuamente, es decir: no es posible, mediante procedimientos lógicos, deducir algo que esté en contradicción con los axiomas establecidos. Para verlo bastará con presentar una geometría en la que se cumplan de vez todos los axiomas de los cinco grupos.

Considérese el dominio Ω de todos aquellos números algebraicos que resultan partiendo del número 1 y aplicando un número finito de veces las cuatro operaciones del cálculo: adición, sustracción, multiplicación, división y además la quinta $\sqrt{1+\omega^2}$ donde ω designa en cada caso un número obtenido ya por las cinco operaciones. Pensemos un par de números (x, y) del dominio Ω como si fuera un punto, y las relaciones de dos puntos cualesquiera $(u : v : w)$

del dominio Ω como una recta, caso de que u,v no sean de vez cero; además el que valga la ecuación

$$ux+vy=0$$

expresará que el punto (x,y) se encuentra en la recta $(u:v:w)$.

Como es fácil de ver se cumplen con esto los axiomas I. 1–2 y III. Los números del dominio Ω son todos ellos reales; y si consideramos que todos ellos pueden ordenarse según su magnitud, podremos fácilmente fijar por convención un orden tal para nuestros puntos y rectas que se cumplan también todos los axiomas del grupo II.

En efecto: sean (x_1, y_1), $x_2, y_2)$, (x_3, y_3). . . puntos cualesquiera de una recta; y sea éste su orden de sucesión en la recta, si los números $x_1, x_2, x_3, \ldots$ o los $y_1, y_2, y_3, \ldots$ tomados en este orden crecen o disminuyen constantemente. Además para cumplir la exigencia del axioma II. 5 hemos de asegurar el que todos los puntos (x,y), para los que $ux+vy+w$ es mayor o menor que 0, han de caer correlativamente en uno de los lados de la recta. Con esto es fácil convencerse que esta fijación concuerda con aquella otra en virtud de la cual se determinó el orden de sucesión de los puntos en una recta.

El transporte de segmentos y de ángulos se verifica según los métodos conocidos de la geometría analítica.

Mediante una transformación de la forma

$$x' = x+a$$
$$y' = y+b$$

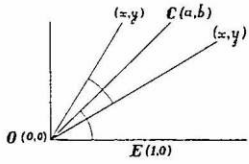
se consigue el desplazamiento paralelo de segmentos y ángulos.

Si además se designa el punto $(0,0)$ con 0, el punto $(1,0)$

con E y un punto cualquiera (a,b) con C, por giro sobre el ángulo ∢ (COE), siendo O el punto fijo, el punto arbitrario (x,y) dará el punto (x',y') poniendo

$$x' = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\ x - \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\ y$$

$$y' = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\ x + \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\ y$$



Y puesto que el número $\sqrt{a^2+b^2} - a\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}$ pertenece al dominio Ω, valdrán con las fijaciones predichas los axiomas de congruencia, grupo IV; y además es claro que se cumplirá el axioma de Arquímedes.

De todo lo cual deducimos que cualquier contradicción en las conclusiones de nuestros axiomas tendría que resultar recognoscible también en la aritmética del dominio Ω.

No ofrece ninguna dificultad ampliar para la geometría del espacio las consideraciones dichas.

Si para las consideraciones anteriores elegimos, en vez del dominio Ω, el de ***todos*** los números reales, obtendremos igualmente una geometría en la que valdrán de vez todos los axiomas I- V. Para nuestra prueba basta con el empleo del dominio Ω que sólo incluye un conjunto enumerable de elementos.

§ 10

La independencia del axioma de paralelismo.

(Geometría no euclídea)

FUNDAMENTOS DE LA GEOMETRIA

Después de probar la no contradiccion de los axiomas resulta interesante investigar si son independientes entre sí. Y de hecho es así: que ninguno de los axiomas puede ser deducido de otro por procedimientos lógicos.

Por de pronto: en lo que respecta a cada uno de los axiomas de los grupos I. II. IV es fácil demostrar que los axiomas de un mismo grupo son independientes entre sí.

Los axiomas de los grupos I. II sirven en nuestra exposición de fundamento para los demás axiomas. de modo que. según esto. se trataría exclusivamente de demostrar que cada uno de los grupos III. IV. V es independiente de los demás.

La *primera* afirmación incluída en el axioma de paralelismo puede ser demostrada por medio de los axiomas de los grupos I. II. IV.

Para verlo unamos el punto dado A con un punto cualquiera B de la recta a. Sea además C otro punto cualquiera de la recta a. Apliquemos $\sphericalangle$ ABC a AB en el punto A y en aquel lado del mismo plano α en el que no se encuentre el punto C. La recta así obtenida. y que pasa por el punto A. no corta a la recta $\underline{a}$.

En efecto: corte la recta $\underline{a}$ en el punto D y supongamos que B se halle entre C y D, podríamos en tal caso encontrar sobre $\underline{a}$ un punto D' tal que se hallara entre D y D' y además valdría

$$AD = BD'.$$

Y en fuerza de la congruencia de los triángulos ABD y BAD' se seguiría la congruencia

$$\sphericalangle ABD = \sphericalangle BAD';$$

y puesto que los ángulos ABD' y ABD son adyacentes.

tendrían que ser también. por el teorema 12. adyacentes los ángulos BAD y BAD'. lo cual no es así en virtud del teorema I.

La *segunda* afirmación incluída en el axioma de paralelismo III es independiente de los demás axiomas.

La manera más fácil de demostrarlo es la siguiente: tómense aquellos puntos. rectas y planos de la geometría ordinaria. construídos en el § 9. que caigan dentro de una esfera sólida y considéreselos cual si fueran elementos de una geometría espacial. y para las congruencias de esta geometría empléense aquellas transformaciones lineales de la geometría ordinaria que transforman la esfera sólida en si misma. Mediante convenciones apropiadas se muestra que en esta geometría *no euclídea* valen todos los axiomas fuera del euclídeo. axioma III. y puesto que quedó demostrada en el § 9 la posibilidad de la geometría ordinaria. podremos ahora concluir a la posibilidad de la geometría no euclídea.

§ 11.

La independencia de los axiomas de congruencia.

Conoceremos que los axiomas de congruencia son independientes entre si. si probamos que el axioma IV. 6 o. lo que resulta igual. el primer teorema de congruencia para triángulos. esto es el teorema 10. no puede ser deducido lógicamente por medio de los restantes axiomas I. II. III. IV. 1-5.V.

Tomemos los puntos. rectas y planos de la geometría

ordinaria como elementos también de la nueva geometría espacial y definamos el transporte de ángulos como en la geometría ordinaria, por ejemplo según la manera que se expuso en el § 9. Por el contrario, definamos el transporte de segmentos de otra manera.

Tengan respectivamente los dos puntos A_1, A_2 en la geometría ordinaria las coordenadas $x_1, y_1, z_1; y_2, z_2$. Designemos entonces el valor positivo de

$$\sqrt{(x_1 - x_2 + y_1 - y_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

como la longitud del segmento $A_1 A_2$. Según esto dos segmentos cualesquiera A_1A_2, $A_1'A_2'$ se llamarán congruentes entre sí si tienen la misma longitud en el sentido prefijado.

Es evidente sin más que, en la geometría espacial así construída, valen los axiomas I, II, III, IV. 1–2, 4–5, y V.

Para demostrar que también se cumple el axioma IV. 3 tomemos una recta cualquiera $\underline{a}$ y en ella tres puntos A_1, A_2, A_3 tales que A_2 esté entre A_1 y A_3. Los puntos x, y, z en la recta $\underline{a}$ estén dados por las ecuaciones

$$x = \lambda t + \lambda'$$
$$y = \mu t + \mu'$$
$$z = \nu t + \nu'$$

donde $\lambda, \lambda', \mu, \mu', \nu, \nu'$ son constantes cualesquiera y t un parámetro. Sean $t_1, t_2 (\leq t_1), t_3 (< t_2)$ los valores del parámetro correspondientes a los puntos A_1, A_2, A_3; encontraremos para las longitudes de los tres segmentos A_1A_2, A_2A_3, y A_1A_3 las expresiones

$$\sqrt{(t_1 - t_2) \quad (\lambda + \mu)^2 + \mu^2 + \nu^2}$$
$$\sqrt{(t_2 - t_3) \quad (\lambda + \mu)^2 + \mu^2 + \nu^2}$$

$$(t_1-t_3)|\sqrt{(\lambda+\mu)^2+\mu^2+\nu^2} \quad ;$$

y, por tanto, la suma de las longitudes de los segmentos A_1A_2 y A_2A_3 es igual a la longitud del segmento A_1A_3, circunstancia que asegura la validez del axioma IV. 5.

Empero el axioma IV. 6, y mejor el primer teorema de congruencia para triángulos, no se cumple siempre en nuestra geometría.

Consideremos, por ejemplo, en el plano $z = 0$ los cuatro puntos:

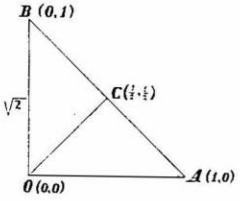
O con las coordenadas $x=0, y=0$

A con las coordenadas $x=1, y=0$

B con las coordenadas $x=0, y=1$

C con las coordenadas $x=\frac{1}{2}, y=\frac{1}{2}$;

en los triángulos rectángulos OAC y OBC son respectivamente congruentes los ángulos en C y los lados adyacentes, porque el lado OC es común a ambos triángulos y los segmentos AC y BC poseen la misma longitud, $\frac{1}{2}$.



Por el contrario, los lados terceros OA, OB tienen respectivamente las longitudes 1 y 2. Y por tanto no son congruentes.

No resulta tampoco difícil hallar en esta geometría dos triángulos en los que no se cumpla el axioma IV. 6.

§ 12.

La independencia del axioma de continuidad

(Geometría no arquimédica)

Para demostrar la independencia del axioma de Arquímedes, V, hemos de construir una geometría en la que se cumplan todos los axiomas con excepción del de Arquímedes.

Para este fin construyamos el dominio $\Omega(\mathfrak{t})$ de todas aquellas funciones algebraicas de $\mathfrak{t}$ que salen de $\mathfrak{t}$ por medio de las cuatro operaciones: adición, sustracción multiplicación, división y por la quinta $\sqrt{1+\omega^2}$, donde ω significa una función cualquiera construída ya por medio de las cinco operaciones dichas El conjunto de los elementos de $\Omega(\mathfrak{t})$, lo mismo que el de Ω, sea enumerable. Las cinco operaciones han de ser realizables unívocamente y en el dominio real y en tal caso $\Omega(\mathfrak{t})$ contendrá solamente funciones unívocas y reales de $\mathfrak{t}$.

Sea $\mathfrak{c}$ una función cualquiera del dominio $\Omega(\mathfrak{t})$; puesto que la función $\mathfrak{c}$ es una función algebraica de $\mathfrak{t}$, sólo podrá anularse para un número finito de valores de $\mathfrak{t}$, y por tanto para valores positivos de $\mathfrak{t}$ suficientemente grandes la función $\mathfrak{c}$ resultará o siempre positiva o siempre negativa. Consideremos ahora las funciones del dominio $\Omega(\mathfrak{t})$ como una especie de números complejos. Evidentemente valen de vez en tal sistema de números complejos, así definidos, las reglas ordinarias de cálculo. Además: si $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ son dos números distintos de este sistema de números complejos, se dirá que el número $\mathfrak{a}$ es mayor o menor que el $\mathfrak{b}$ simbólicamente $\mathfrak{a} > \mathfrak{b}$ o bien $\mathfrak{a} < \mathfrak{b}$, según que la diferencia $\mathfrak{c} = \mathfrak{a} - \mathfrak{b}$ como función de $\mathfrak{t}$ resulte, para valores de $\mathfrak{t}$ suficientemente grandes, siempre positiva o siempre negativa. Con esta convención resulta posible ordenar según magnitud los números de nuestro sistema numérico

complejo, ordenación que es del mismo tipo que la de los números reales. Valen también para nuestros números complejos, como se reconoce fácilmente, los teoremas según los cuales las desigualdades continúan validas si se añade a ambas partes el mismo número o se las multiplica con un mismo número mayor que cero.

Signifique $\underline{n}$ un número racional positivo cualquiera; valdrá ciertamente para los dos números $\underline{n}$ y $\underline{t}$ del dominio $\Omega(\underline{t})$ la desigualdad $\underline{n} < \underline{t}$ porque la diferencia $\underline{n} - \underline{t}$ considerada como función de $\underline{t}$, para valores suficientemente grandes de $\underline{t}$ resulta evidentemente negativa. A este hecho le damos la formulación siguiente; los dos números 1 y $\underline{t}$ del dominio $\Omega(\underline{t})$ son mayores que cero y poseen la propiedad de que un múltiplo cualquiera del primero es siempre menor que el otro.

Con los números complejos del dominio $\Omega(\underline{t})$ construyamos ahora una geometría de manera parecida a como lo hicimos en el § 9 a base del dominio Ω de los números algebraicos. Pensemos un sistema de tres números (x,y,z) del dominio $\Omega(\underline{t})$ cual si fuera un punto; y las relaciones entre cuatro números $(u:v:w:r)$ de $\Omega(\underline{t})$, en el caso de que no sean nulos de vez, como si fuera un plano; además, en el caso de valer la ecuación

$$ux + vy + wz + r = 0$$

exprese que el punto $(x,y,z,)$ está en el plano $(u:v:w:r)$, y sea la recta el conjunto de todos los puntos que estén en dos planos. Echemos mano entonces de las correspondientes convenciones para fijar el orden de los elementos y el transporte de segmentos y ángulos, tal como se hizo en el §9; resultará entonces una geometría ***no arquimédica*** en la

cual, como muestran las anteriormente explicadas propiedades del sistema de números complejos $\Omega(\mathfrak{t})$, se cumplen todos los axiomas menos el de Arquímedes. En efecto: podemos transportar el segmento 1 sobre el segmento $\mathfrak{t}$ cuantas veces queramos, una a continuación de otra, sin que se llegue al punto final del segmento $\mathfrak{t}$. Lo cual contradice a lo exigido por el axioma de Arquímedes.

CAPITULO TERCERO

LA TEORIA DE LAS PROPORCIONES

§ 13.

Sistemas de números complejos.

Al principio de este capítulo vamos a adelantar algunas breves consideraciones sobre sistemas de números complejos que nos serán más adelante útiles para facilitar la exposición.

Los números reales forman en conjunto un sistema de cosas que poseen las propiedades siguientes:

Proposiciones sobre enlace (1–12)

1. Por *adición* del número a y del número b resulta un número determinado c, simbólicamente.

$$a+b=c, \text{ o sea } c=a+b.$$

2. Hay un número determinado, llámase cero, tal que para cada a valen de vez

$$a+0=a \text{ y } 0+a=a.$$

3. Si a y b son dos números dados, existe siempre un

número y uno solo $\underline{x}$ y también un solo número y tales que valga

$$a+x=b, \text{ y correlativamente, } y+a=b$$

4. Del número $\underline{a}$ y del número $\underline{b}$ resulta además por una nueva manera de enlace, por *multiplicación,* un número determinado c, simbólicamente

$$ab=c \quad \text{o bien } c=ab.$$

5. Hay un número determinado, llámese 1, & tal que para cada $\underline{a}$ valen de vez

$$a.1=a \text{ y } 1.a=a.$$

6. Si $\underline{a}$ y $\underline{b}$ son dos números cualesquiera dados y $\underline{a}$ no es 0, existe siempre un número y uno solo $\underline{x}$ y también uno y uno solo $\underline{y}$, tal que valen respectivamente

$$ax=b, \text{ y } a=b.$$

Si $\underline{a}$ $\underline{b}$ $\underline{c}$ son números cualesquiera, valen siempre las siguientes reglas de cálculo:

7. $a+(b+c)=(a+b)+c$
8. $a+b=b+a$
9. $a(bc)=(ab)c$
10. $a(b+c)=ab+ac$
11. $(a+b)c=ac+bc$
12. $ab=ba.$

Proposiciones sobre el orden. (13–16)

13. Si $\underline{a}$ $\underline{b}$ son dos números distintos cualesquiera, uno de ellos, por ejemplo el $\underline{a}$ será siempre mayor ($>$) que el otro; éste se llamará el menor, simbólicamente

$$a > b \text{ y } b < a.$$

14. Si $a > b$ y $b > c$, vale tambien $a > c$.

15. Si $a > b$, valdrá también siempre

$$a+c > b+c \quad y \quad c+a > c+b.$$

16. Si $a>b$ y $c>0$, valdrán también siempre

$$ac>bc \quad y \quad ca > cb.$$

Proposición de Arquímedes (17).

Si $\underline{a}>0$ y $\underline{b}>0$, siendo $\underline{a},\underline{b}$ dos números cualesquiera, es siempre posible añadir $\underline{a}$ consigo mismo tantas veces que la suma resultante tenga la propiedad

$$a+a+a+a\ldots+a > b.$$

Un sistema de cosas que sólo posea una parte de las propiedades 1-17 se llamará ***sistema de números complejos*** o también simplemente ***sistema de números.*** Un sistema de números se llamará ***arquimédico*** o ***no arquimédico*** según que cumpla o no la exigencia 17.

De entre las propiedades 1-17 algunas son consecuencia de las demás. Y habrá que estudiar el tema de su independencia lógica.

(§14. Demostración del teorema de Pascal). (§15. Cálculo de segmentos según el teorema de Pascal). (§16. Proporciones y teoremas de semejanza). (§17. Ecuaciones de la recta y del plano).

CAPITULO CUARTO
La teoría del área de las superficies planas. (§18-21).

CAPITULO QUINTO
El teorema de Desargues. (§22-30).

CAPITULO SEXTO
El teorema de Pascal (§31-35).

CAPITULO SEPTIMO

LAS CONSTRUCIONES GEOMETRICAS A BASE DE LOS AXIOMAS I–V.

§ 36.

Construcciones geométricas por medio de la regla y el transportador lineal.

Supongamos que se nos ha dado una geometría espacial en la que se cumplen todos los axiomas de los grupos I a V; para simplificar consideremos en este capítulo una geometría plana incluída en la geometría espacial dicha; e investiguemos la cuestión de qué construcciones elementales se podrán necesariamente realizar en tal geometría

A base de los axiomas I son siempre posibles los siguientes problemas:

Problema I. Unir dos puntos con una recta y hallar el punto en que se cortan dos rectas, en caso de que las rectas no sean paralelas.

El axioma III hace posible resolver el siguiente problema:

Problema 2. Por un punto dado trazar a una recta una paralela.

Por medio de los axiomas de congruencia IV es posible transportar segmentos y ángulos. esto es se pueden resolver en la geometría propuesta los siguientes problemas:

Problema 3. Transportar y aplicar un segmento dado sobre una recta dada a partir de un punto.

Problema 4. Sobre una recta dada aplicar un ángulo dado o construir una recta que corte a otra dada bajo un ángulo dado.

Sirviéndose de los axiomas de los grupos II y V no se pueden resolver más problemas; vemos. por tanto. que empleando exclusivamente los axiomas I-V se pueden resolver todos y solamente aquellos problemas que puedan reducirse a los problemas enumerados. 1-4.

A los problemas fundamentales 1-4 añadimos el siguiente:

Problema 5. Trazar una perpendicular a una recta dada.

Se ve inmediatamente que este problema 5 puede ser resuelto de muchas maneras sirviéndose de los 1-4.

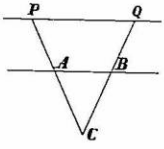
Para ejecutar el problema 1 necesitamos de la regla. Y llamaremos *trasportador de segmentos* aquel instrumento que sirva para ejecutar el problema 3. es decir: para aplicar un segmento sobre una recta dada. Vamos a demostrar ahora que los problemas 2. 4 y 5 pueden reducirse a la solución de los problemas 1.3; y. por tanto. que todos los problemas 1-5 pueden ser resueltos empleando únicamente la regla y el transportador de

segmentos.

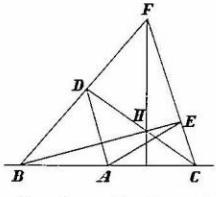
El resultado es el siguiente:

Teorema 40. Aquellos problemas de construcciones geométricas que pueden ser resueltos empleando exclusivamente los axiomas I–V *pueden ejecutarse mediante la regla y el transportador de segmentos.*

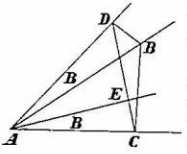
Demostración. Para reducir el problema 2 a los problemas 1 y 3 unamos el punto dado A con otro punto cualquiera P de la recta dada y prolonguemos PA en una longitud igual a si misma por el lado de A hasta el C. Unamos entonces C con otro punto cualquiera B de la recta dada y prolonguemos CB en una longitud igual a si misma continuando B hasta el punto Q; la recta PQ es la paralela buscada.



El problema 5 se resuelve de la siguiente manera: Sea A un punto cualquiera de la recta dada; y a partir de A prolonguemos por cada lado dos segmentos iguales AB y AC, y sobre otras dos rectas cualesquiera de las que pasan por A fijemos los puntos E y D tales que los segmentos AD y AE sean iguales a los segmentos AB y AC. Las rectas BD y CE córtense en F, las rectas BE y CD en H; FH es la perpendicular que se busca. En efecto: los ángulos < BDC y < BEC son, por ángulos en el semicírculo sobre BC, rectos; y por tanto, según el teorema acerca del punto en que se cortan las alturas de un triángulo, aplicado al triángulo BCF, resultará que el FH es perpendicular al BC.



Ahora podemos fácilmente resolver también el problema 4. empleando únicamente como medios el trazar líneas y transportar y aplicar segmentos. Sigamos este procedimiento. que sólo exige trazar paralelas y perpendiculares.



Sea β el ángulo a trasportar y A su vértice. Tracemos por el punto A la recta 1 paralela a la recta dada. en la que hay que aplicar el ángulo dado β. Desde un punto cualquiera B de uno de los lados de β tracemos la perpendicular al otro lado del ángulo β y a 1. Los pies de estas perpendiculares sean D y C. La construcción de perpendiculares se hace según los problemas 2 y 5. Tracemos además desde el punto A una perpendicular a CD. y sea E su pie. Según la demostración dada en el § 14 será $< CAE = \beta$; con lo cual el problema 4 queda reducido a los problemas 1 y 4. y el teorema 40 está perfectamente demostrado.

(§ 37-39)

EPILOGO.

El precedente tratado investiga críticamente los principios de la geometría. Nos sirvió de guía en tal investigación la idea fundamental de estudiar toda cuestión que se ofreciera de modo que pusiésemos a la vez a prueba si era o no posible responderla según un método prescrito de antemano y un cierto número restringido de medios.

Y esta idea me parece encerrar una norma general, a la vez que acomodada a la naturaleza de las cosas. Y de hecho, cuando en nuestras consideraciones matemáticas nos encontramos con un problema o entrevemos un teorema, nuestro afán de conocimientos quedará satisfecho precisamente cuando o bien podamos resolver perfectamente tal problema y aprontar su demostración estricta o cuando hayamos reconocido claramente el fundamento de la imposibilidad de llegar a un resultado, y con ello la necesidad del fracaso.

Y por esto en la matemática moderna la cuestión sobre la imposibilidad de ciertas soluciones o problemas juega un papel destacado, y los esfuerzos para responder a preguntas

de esta clase han sido frecuentemente ocasión para descubrir nuevos y fructuosos campos de investigaciones.

Baste recordar la demostración de Abel sobre la imposibilidad de resolver ecuaciones de quinto grado por medio de radicales, el reconocimiento de la indemostrabilidad del axioma de las paralelas y los teoremas de Hermite y Lindemann sobre la imposibilidad de construir por métodos algebraicos los números e y π.

Y esta exigencia fundamental, según la cual hay que investigar los principios referentes a la posibilidad de las demostraciones, está íntimamente conexa con la exigencia de "pureza" de los métodos demostrativos, elevada a principio por muchos de los matemáticos de nuestro tiempo. Esta exigencia no es, fundamentalmente, sino una formulación sujetiva de la idea básica que aquí se ha seguido. En efecto: la investigación geométrica precedente pretende dilucidar en toda su generalidad qué axiomas, presupuestos o medios auxiliares son necesarios para una verdad de geometría elemental, dejando a las circunstancias la elección de los métodos demostrativos adaptados al punto de vista que se haya tomado.

(Textos tomados de la obra *"Grundlagen der Geometrie"*, de David Hilbert, Leipzig, B.G. Teubner, 1899).

NOTA.

El texto griego, base de esta edición y de la traducción española, es el establecido por I.L. Heiberg y H. Menge y publicado en la *Bibliotheca Scriptorum graecorum et romanorum teubneriana* (*Euclidis opera omnia*, Lipsiae, vol. I. 1883, libros I–V; vol. II, 1884, libr. V–IX; vol. III, 1886, libro X; vol IV, 1885, libros XU; XIII).

–2) Para un mejor aprovechamiento del texto se han añadido, como en la edición Teubner, figuras; y además de esta innovación peculiar de la edición teubneriana, en la presente cada paso demostrativo lleva en paréntesis la indicación de las definiciones (D. I. 1 a D. I. 23; D. II. 1 a D. II. 2; D. III. 1 a D. III. 11 etc.), Postulados (P. I a P. V), Nociones comunes (N. I a N. IX) y teoremas (T.I. 1 a T. I. 48; T. II. 1 a T. II 14; T. III. 1 a T. III. 37 etc.) que se empleen, para así ajustar esta primera edición castellana al método axiomático moderno y a los procedimientos técnicos de la lógica matemática.

Los números I. II. III. . . aluden a los libros; los números 1, 2, 3, 4. . ., numeran por su orden las definiciones y los teoremas de cada libro. La letra D es abreviación de Definición; la de P, de postulado; la N, de noción común; y la T, de teorema, numerados en el texto griego por las

letras del alfabeto.

–3) Las abreviaciones Hip., Tes. significan Hipótesis y Tesis, y servirán para designar los correspondientes pasos en las demostraciones.

–4) Según las fórmulas finales que, al terminar cada teorema, pone Euclides distinguiremos entre *Teoremas constructivos* (T. C., correspondientes a la fórmula final ὅπερ ἔδει ποιῆσαι) y *Teoremas demostrativos* (T. D., correspondientes a la fórmula final ὅπερ ἔδει δεῖξαι).

–5) Cuando dentro de los paréntesis indicadores del fundamento lógico del correspondiente paso demostrativo se hallare un asterisco indicará esta señal que el P. o el T. o la N. o la D. empleados no se hallan ***explícitamente*** en Euclides y que son, por tanto, pasos demostrativos ***implícitos.*** El número de asteriscos, que es notable, servirá de índice para computar la falta de estructura lógica explícita y perfecta de los *Elementos,* falta que, al poder ser suplida como lo ha sido históricamente por otras redacciones axiomáticas perfectas, no atenta en nada contra el edificio geométrico de Euclides, sólo pone de manifiesto la forma levemente imperfecta que recibió de su autor.

–6) Para esta edición y la traducción correspondiente nos hemos servido largamente de la edición de Enriques: *"Gli Elementi d'Euclide e la critica antica e moderna"*; en especial para este volumen, del primero que comprende los libros I–IV. (1925; Alberto Stock, Roma).

I.

FORMULAS LOGICAS.

(Empleadas implícitamente por Euclides y que aquí se ponen explícitamente)

–1) L. I. o inversión lógica.

a) $(p \rightarrow q) \rightarrow (\bar{q} \rightarrow \bar{p})$. donde p.q son proposiciones cualesquiera. $\rightarrow$ el signo de la operación lógica "*por tanto*" (implicación) y – el signo de la operación lógica negación (no)

Son fórmulas equivalentes a la anterior. deducidas de ella&mediante la regla de sustitución.

b) $(\bar{p} \rightarrow \bar{q}) \rightarrow (q \rightarrow p)$.

c) $(\bar{p} \rightarrow q) \rightarrow (\bar{q} \rightarrow p)$.

–2) L. R. o reducción al absurdo o imposible;

a) $(\bar{p} \rightarrow p) \rightarrow p$. o bien

b) $(p \rightarrow \bar{p}) \rightarrow \bar{p}$.

–3) Syll. o fórmulas silogísticas de deducción empleadas de dos maneras.

a) Syll.P. o silogismo proposicional corriente.

$[(p \rightarrow q) \,\&\, (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$.donde & es el signo de la operación lógica "*y*" (unión copulativa).

b) Syll.R. o silogismo relacional.

1) a base de las nociones comunes. sobre todo de la I y de la VIII. empleadas como fórmulas de demostración. vgr.

$[(a-b) \& (b-c)] \rightarrow (a-c)$, donde - es el signo de la relación de igualdad. Teniendo presente que cada uno de los paréntesis es una proposición que suele demostrarse aparte.

2) a base de sustitución dentro de la relación, vgr.

$[(a+b-2R) \& (a+b > m+n)] \rightarrow (m+n < 2R)$, donde R simboliza ángulo recto.

Se indicará el empleo ***demostrativo*** de las nociones comunes, sobre todo de la I, poniendo al lado Syll. P. cuando se emplee como premisa de un silogismo ordinario; y Syll. R., cuando se emplee como fórmula del silogismo relacional.

—4) L.A o ampliación lógica:

a) si son verdaderas, -por hipótesis o por demostración-, las proposiciones p,q será también verdadera la proposición ***total*** $(p \& q)$;

b) si son verdaderas, -por hipótesis o por demostración-, las implicaciones $(p \rightarrow q)$ y $(r \rightarrow s)$ entre las proposiciones p,q,r,s será también verdadera la implicación compleja $(p \& r) \rightarrow (q \& s)$.

—5) A veces emplea Euclides la inversa de una proposicion directa ***dada***, como noción común-, o bien demostrada, mas sin demostrar tal inversa o ponerla explícitamente entre las nociones comunes. Así la N. VII. concluye de "congruencia a igualdad"; y el teorema I.4 emplea la inversa: de la igualdad a congruencia. Para indicar tales casos añadimos Inv., -así N VII. Inv.

II.

Reglas de deducción lógica.

(No indicadas explícitamente por Euclides, mas empleadas en los procesos deductivos).

–1) *Modus ponens:*

–a) si es verdadera la implicación $(p \rightarrow q)$ y se sabe, –por hipótesis o por demostración–, que la proposición p es verdadera, habrá que afirmar que lo es también la q

$\vdash (p \rightarrow q), \vdash p; \vdash q.$ $\vdash$ signo de aserción o afirmación de que es verdadera la proposición o unión de proposiciones ante las que se lo coloque.

Indicación simbólica: M.P.

–b) si vale la implicación $p \rightarrow (q \vee r)$, donde $\vee$ es el signo de la operación lógica "disyunción" o alternativa (expresada corrientemente con la palabra *"o"*, *"o bien"*), y se sabe que una de las dos proposiciones q, r es falsa, la otra será verdadera para que así den una implicación verdadera por hipótesis o demostración, –y así si q es falsa, será r verdadera; si r es falsa, sera q verdadera. O en forma más simple: si vale $-(p \vee q)$ y consta que p (o q) es falsa, será verdadera q (o p).

Indicación simbólica: L.D.

–2) *Regla de sustitución:*

a) Euclides la emplea sobre todo bajo la fórmula: *"y de parecida manera demostraríamos"*, para indicar que en el proceso demostrativo hecho con *ciertas* magnitudes pueden sustituirse las otras que indica y con todo la estructura deductiva permanece la misma.

b) Euclides hace sustituciones dentro de un

silogismo, a base de sustituir cosas iguales entre sí. Cf.T.II. 8 (73, 74).

Indicación simbólica: L.S.

Se notará que el silogismo euclídeo no siempre presenta una forma perfecta según el rigor lógico clásico.

III.

Advertencias técnicas para las demostraciones.

–1) Hemos numerado no sólo los teoremas de cada libro, –T.I.1, T.I.2, . . ; a T.I.48 en el libro primero; T. II. 1, T. II.2. . .a T.II.14 en el libro segundo etc.–, sino cada uno de los pasos de las demostraciones, indicando en qué definiciones (D.), postulados (P.) o nociones comunes (N.) o teoremas ya demostrados (T.) se apoya, añadiendo la indicación de las leyes lógicas empleadas.

–2) Todo paso demostrativo cuya justificación no se halle en los grupos de definiciones, postulados, nociones comunes y teoremas demostrados por Euclides (o sus sucesores inmediatos a tenor del texto griego propuesto) se indicarán con un asterisco. Así D.* indicará que Euclides se sirve de una definición que no consta explícitamente en el grupo de las definiciones propuestas. P.* indicará un postulado implícito; N.*, una noción implícita; T.*, un teorema implícito. Además: si detrás de D,P,T,N, se añade un número, –D.I.*, D.II.*, P.I.*, P.II.*. . .–, el asterisco indicará que se trata de una definición, postulado, noción o teorema adjunto o referente al correspondiente al número escrito.

–3) La noción común I (N. I.) se emplea en Euclides

como Syll.P.* y como Syll. R.* y llevará un asterisco.

–4) Según la terminología euclídea la frase "δίχα τέμνειν" significa dividir en dos partes *"iguales"*.

–5) La noción común VIII: "el todo es mayor que su parte", habría que completarla con las siguientes que Euclides emplea implícitamente:

N.VIII.A: "T(a+a+a+. . .)- n.a"; el todo (T) compuesto de las partes a,a,a. . . es igual a n veces a.

N.VIII.B.: "el todo es igual al conjunto de sus partes", T- (a+b+c+d. . .)

N.VIII.C.: "paso del Todo homogéneo a una de sus partes", si T-(a+a), se sigue que $a-\frac{T}{2}$ (Cf. T.II.9.46)

N.VIII.D. : paso general del Todo a una parte;
si T- (a+b), se sigue que a-T-b; o b-T-a.

–6) Euclides emplea también una ampliación de la N.II. que corresponde al axioma moderno de monotonía. Si vale a-b, vale también a^2-b^2, a^n-b^n. Lo indicaremos con N.II.*

–7) Euclides emplea también la N.V como *fórmula silogística,* y no simplemente como una premisa.

–8) La coma entre AB,BC, etc. equivale frecuentemente en Euclides al signo de suma (suma aritmética o geométrica); por el contexto se verá sin mayor dificultad si se trata de una suma o de miembros separados.